Analogie fra i meccanismi di trasporto e principali numeri adimensionali

Fenomeni di Trasporto

Confronto fra le equazioni di bilancio

q. di moto
$$\boxed{\frac{D\breve{\mathbf{v}}}{D\breve{t}}} = \boxed{\frac{1}{\text{Re}}\breve{\nabla}^2\breve{\mathbf{v}}} \boxed{-\breve{\nabla}\breve{\mathcal{P}}}$$

energia
$$\boxed{\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}}} = \boxed{\frac{1}{\text{RePr}}\breve{\nabla}^2\breve{T}} \boxed{+\frac{\text{Br}}{\text{RePr}}\Phi_v}$$

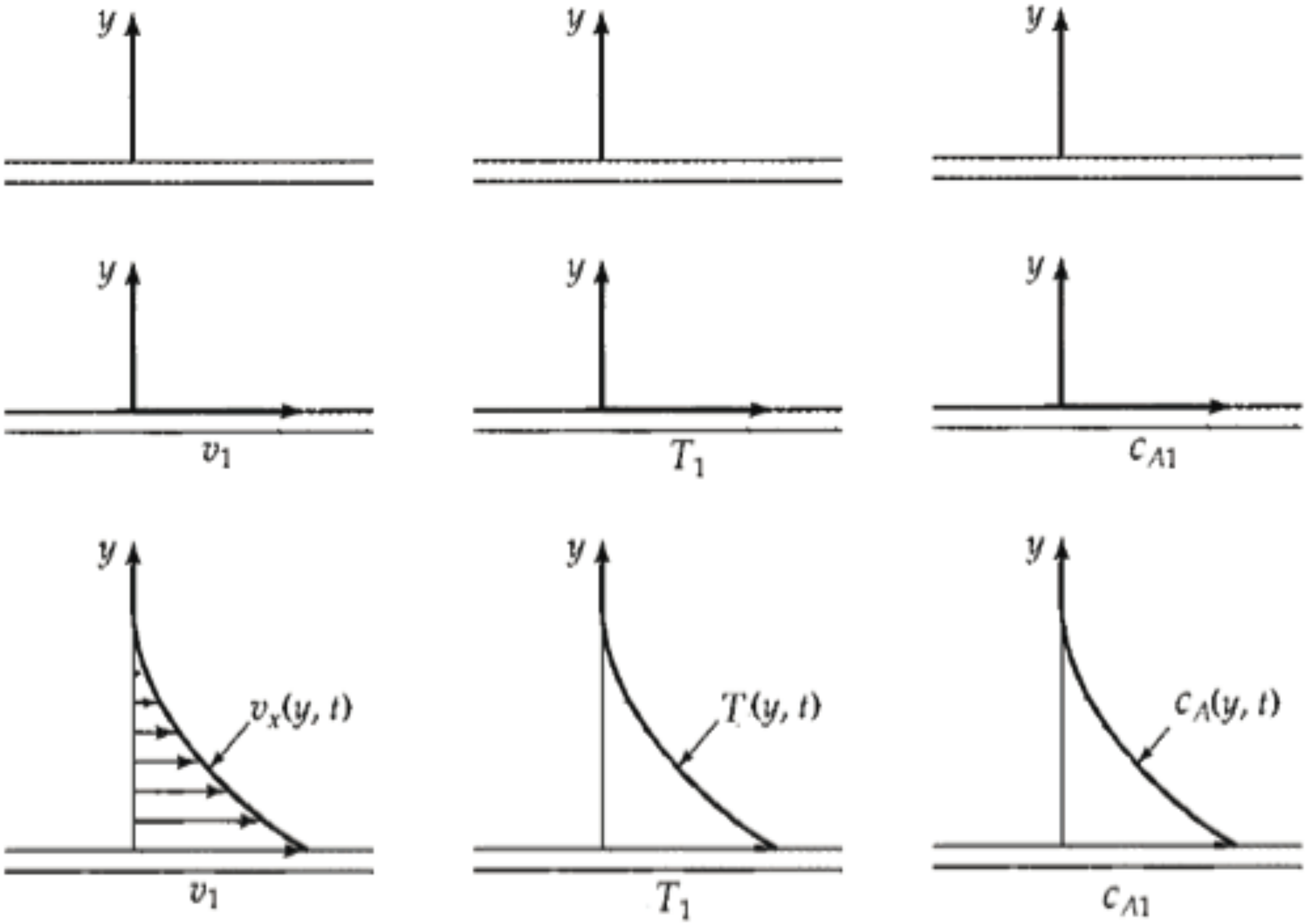
specie chimiche
$$\boxed{\frac{D\breve{c}_A}{D\breve{t}}} = \boxed{\frac{1}{\text{ReSc}}\breve{\nabla}^2\breve{c}_A} \boxed{-\text{Da}^{\text{I}}\,\breve{c}_A^{\,\text{n}}}$$

Accumulo più termini convettivi

Trasporto diffusivo o *molecolare*

Generazione (se scompare l'analogia è completa, ma **il termine di pressione scompare solo in casi particolari**, es. lastra piana investita)

Analogia fra i meccanismi di trasporto



Le soluzioni delle equazioni per i casi di **movimentazione di un fluido**, **riscaldamento di un solido semi-infinito** e **diffusione di materia in un solido semi-infinito** sono analoghe

$$\frac{v_x(y,t)}{v_0} = 1 - \mathrm{erf}\,\frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \qquad \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \mathrm{erf}\,\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \qquad \frac{c_A - c_{A0}}{c_{A1} - c_{A0}} = 1 - \mathrm{erf}\,\frac{y}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB} t}}$$

Analogia fra calore e materia es. moto in condotti

$$\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}} = \frac{1}{\mathrm{RePr}} \breve{\nabla}^2 \breve{T}$$

$$\breve{z} = 0, \breve{T} = 1 \ , \ 0 \leq r < \tfrac{1}{2}$$
$$\breve{r} = \tfrac{1}{2}, \breve{T} = 0 \ , \ 0 \leq z \leq L/D$$

$$\frac{D\breve{c}_A}{D\breve{t}} = \frac{1}{\mathrm{ReSc}} \breve{\nabla}^2 \breve{c}_A$$

$$\breve{z} = 0, \breve{c}_A = 1, \ 0 \leq r < \tfrac{1}{2}$$
$$\breve{r} = \tfrac{1}{2}, \breve{c}_A = 0, \ 0 \leq z \leq L/D$$

$$\left.\begin{aligned} \breve{T} &= F(\breve{r}, \theta, \breve{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \\ \breve{c}_A &= F(\breve{r}, \theta, \breve{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Sc}) \end{aligned}\right\}$$

F è la stessa funzione

Analogia fra calore e materia
es. moto in condotti

$$\breve{T} = F(\breve{r}, \theta, \breve{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \qquad \breve{c}_A = F(\breve{r}, \theta, \breve{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Sc})$$

$$\mathrm{Nu}_1(t) = \frac{h_1 D}{k} = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{T}}{\partial \breve{r}}\bigg|_{\breve{r}=\frac{1}{2}} \right) d\theta \, d\breve{z}$$

$$\mathrm{Sh}_1(t) = \frac{k_{c1} D}{\mathfrak{D}_{AB}} = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{c}_A}{\partial \breve{r}}\bigg|_{\breve{r}=\frac{1}{2}} \right) d\theta \, d\breve{z}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Nu}_1 &= G(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, L/D) \\ \mathrm{Sh}_1 &= G(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc}, L/D) \end{aligned}\right\} \text{ G è la stessa funzione}$$

Confronto fra le equazioni di bilancio

proprietà costanti

q. di moto

$$\frac{D\rho\mathbf{v}}{Dt} = \nu\nabla^2\rho\mathbf{v} - \nabla\mathscr{P}$$

energia

$$\frac{D\rho\hat{C}_pT}{Dt} = \alpha\nabla^2\rho\hat{C}_pT + \mu\Phi_v$$

specie chimiche

$$\frac{Dc_A}{Dt} = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 c_A - k_n c_A^n$$

Accumulo più termini convettivi	Trasporto diffusivo o *molecolare*	Generazione

Confronto fra le equazioni costitutive

proprietà costanti

q. di moto (Newton)

$$\tau_{yx} = -\nu \frac{d\rho v_x}{dy}$$

Energia (Fourier)

$$q_y = -\alpha \frac{d\rho \hat{C}_p T}{dy}$$

specie chimiche (Fick)
(solo diffusione pura)

$$j_y = -\mathscr{D}_{AB} \frac{dc_A}{dy}$$

Confronto fra i coefficienti di scambio

proprietà costanti

q. di moto

$$\tau = f/2\, v(\rho v)$$

Energia

$$q = h(T_0 - T_b) = \frac{h}{\rho \hat{C}_p}(\rho \hat{C}_p T_0 - \rho \hat{C}_p T_b)$$

specie chimiche
(solo diffusione pura)

$$j_{A0} = k_c(c_{A0} - c_{Ab})$$

Confronto fra i coefficienti di scambio

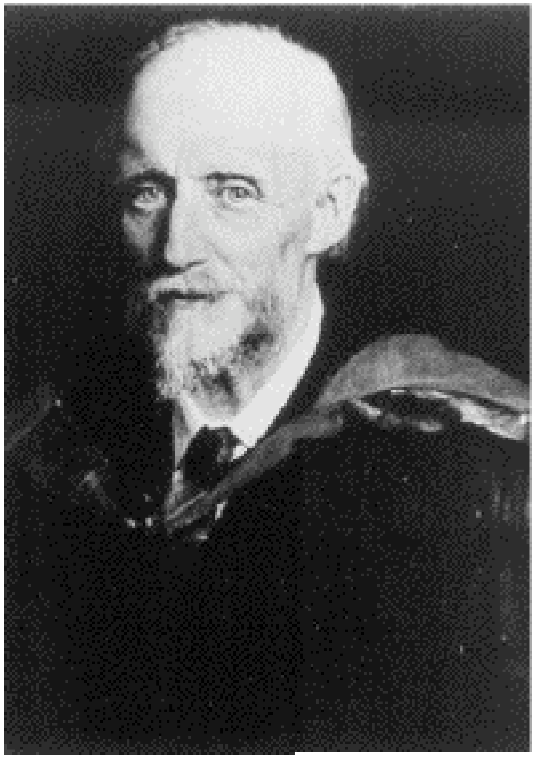
proprietà costanti

	Proprietà per unità di volume	Costante di proporz. per il flusso	Coefficiente di trasporto
q. di moto	ρU	ν	$f/2\ U$
Energia	$\rho C p T$	α	$h/\rho C p$
specie chimiche (solo diffusione pura)	c_A	$\mathcal{D}$	k_c

Numero di Reynolds

OSBOURNE REYNOLDS

1842-1912



Ingegnere e fisico inglese

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

Rappresenta il rapporto fra le forze di inerzia (termine convettivo della q. di moto) e forze viscose (termine molecolare)

$$Re = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu \frac{U}{L} L^2}$$

Numero di Prandtl

LUDWIG PRANDTL

1875-1953

Fisico tedesco

$$Pr = \frac{Cp\ \ \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Rappresenta il rapporto fra la viscosità cinematica (indice della velocità di penetrazione della q. di moto) e la diffusività termica (indice della velocità di penetrazione dell’energia termica)

Numero di Schmidt

Scienziato tedesco

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}} = \frac{\nu}{\mathcal{D}}$$

Rappresenta il rapporto fra la viscosità cinematica (indice della velocità di penetrazione della q. di moto) e la diffusività (indice della velocità di penetrazione della specie chimica)

Numero di Lewis

WARREN KENDALL LEWIS
1882-1975

$$Le = \frac{k}{\rho C p \mathcal{D}} = \frac{\alpha}{\mathcal{D}}$$

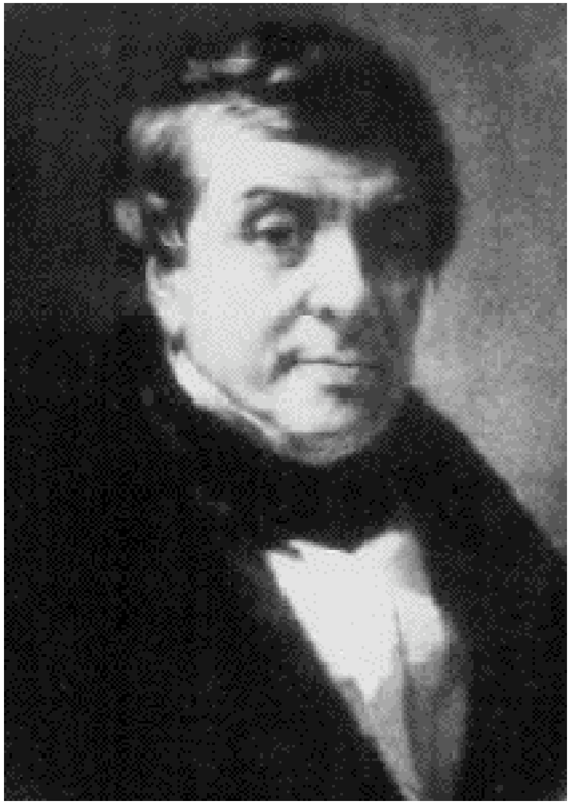
Rappresenta il rapporto fra la diffusività termica (indice della velocità di penetrazione dell'energia termica) e la diffusività (indice della velocità di penetrazione della specie chimica)

Ingegnere statunitense

Numero di Peclet

JEAN CLAUDE EUGENE PECLET

1793-1857



Ingegnere statunitense

$$Pe = Re\ Pr = \frac{UL}{\alpha}$$

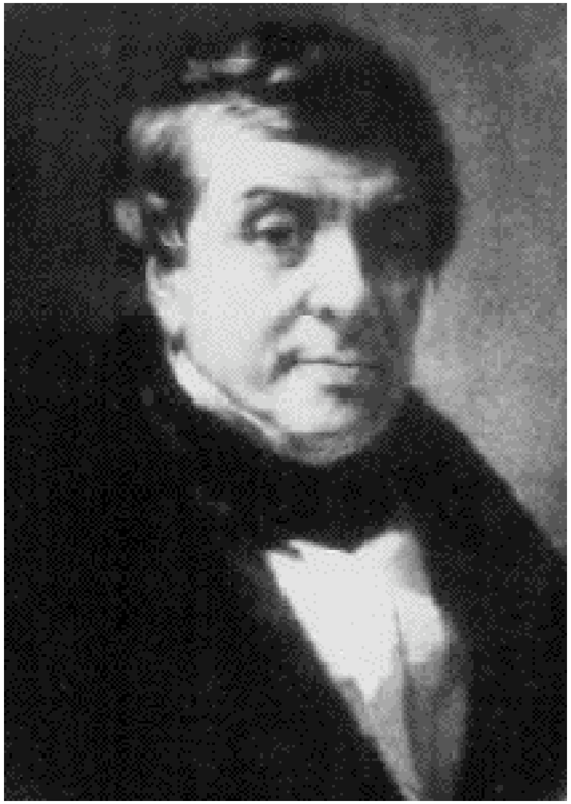
Rappresenta il rapporto fra il termine convettivo e quello diffusivo di energia; è l'analogo per l'energia termica del numero di Reynolds

$$Pe = \frac{\rho C p U \Delta T L^2}{k \frac{\Delta T}{L} L^2}$$

Numero di Peclet massico

JEAN CLAUDE EUGENE PECLET

1793-1857



Ingegnere statunitense

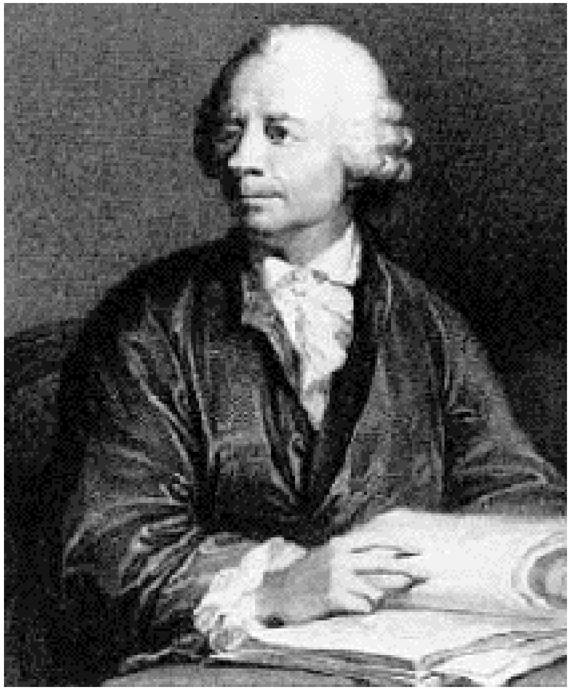
$$Pe_M = Re\,Sc = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

Rappresenta il rapporto fra il termine convettivo e quello diffusivo di materia; è l'analogo per il trasporto di una specie chimica del numero di Reynolds

$$Pe_M = \frac{U \Delta c L^2}{\mathcal{D} \frac{\Delta c}{L} L^2}$$

Numero di Eulero

LEONHARD EULER
1707-1783



Matematico svizzero

$$Eu = \frac{P}{\rho U^2}$$

Rappresenta il rapporto fra le forze di pressione e quelle di inerzia

Numero di Grashof

FRANZ GRASHOF

1826-1893

Ingegnere tedesco

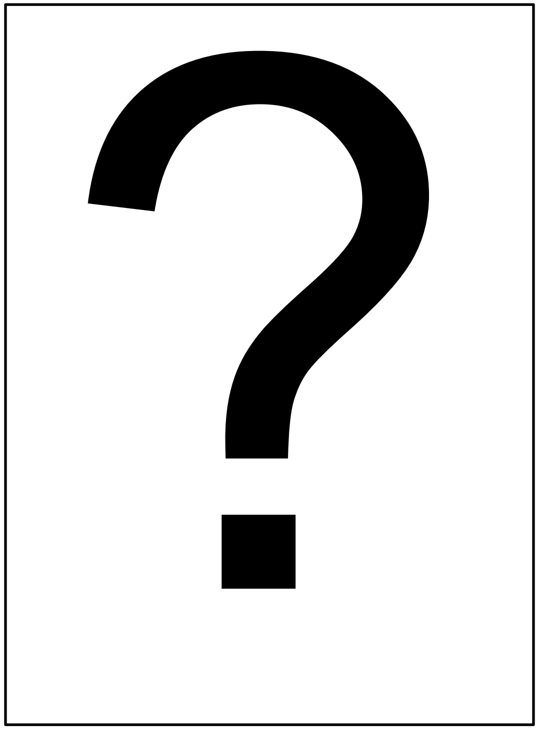
$$Gr = \frac{\rho^2 L^3 g}{\mu^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Rappresenta il prodotto fra il numero di Reynolds e il rapporto fra la forza di sollevamento (di Archimede) e la forza di attrito viscoso, e fornisce l'intensità relativa del termine di convezione naturale

$$Gr = \frac{\rho U L}{\mu} \frac{L^3 g \Delta\rho}{\mu \frac{U}{L} L^2}$$

Numero di Brinkman

HENRI COENRAAD BRINKMAN
1908-1961



Fisico olandese

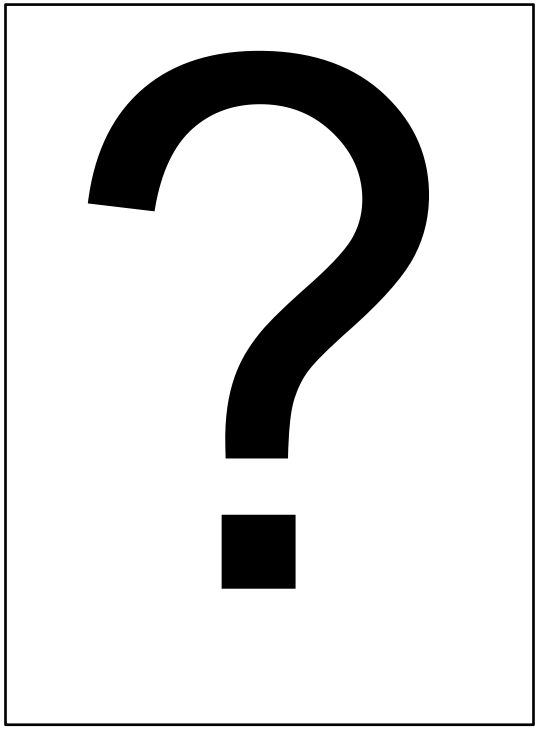
$$Br = \frac{\mu U^2}{k\Delta T}$$

Rappresenta il rapporto fra l'energia dissipata per attrito e l'energia scambiata per trasporto conduttivo (o molecolare)

$$Br = \frac{\mu \dfrac{U^2}{L^2} L^3}{k \dfrac{\Delta T}{L} L^2}$$

1° Numero di Damkohler

GERHARD DAMKOHLER
1908-1944



Scienziato tedesco

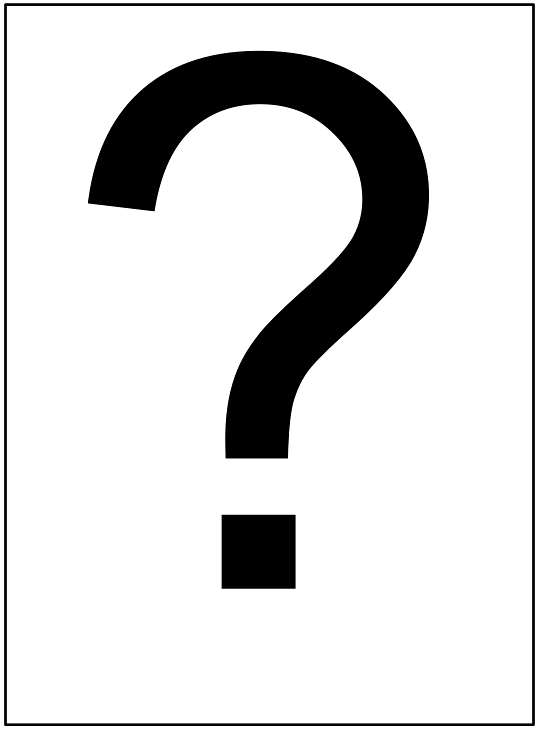
$$Da^I = \frac{k_n c_A^{n-1} L}{U}$$

Rappresenta il rapporto tra la velocità di scomparsa di una specie per reazione chimica e il trasporto della stessa specie per convezione. È l’analogo per la materia del rapporto Br/Pe

$$Da^I = \frac{k_n c_A^n L^3}{U c_A L^2}$$

2° Numero di Damkohler

GERHARD DAMKOHLER
1908-1944



Scienziato tedesco

$$Da^{II} = \frac{k_n c_A^{n-1} L^2}{\mathcal{D}}$$

Rappresenta il rapporto tra la velocità di scomparsa di una specie per reazione chimica e il trasporto della stessa specie per moto diffusivo. È l'analogo per la materia del numero di Brinkman

$$Da^{II} = \frac{k_n c_A^{n-1} L^3}{\mathcal{D} \frac{c_A}{L} L^2}$$

Numero di Graetz

LEO GRAETZ

1856-1941

Fisico tedesco

$$Gz = \frac{wCp}{kL}\left(= \frac{\pi}{4}\frac{D}{L} Re\, Pr\right)$$

Rappresenta il rapporto fra l'energia trasportata per moto convettivo e quella scambiata per conduzione verso la superficie laterale di un condotto

$$Gz = \frac{wCp\Delta T}{k\dfrac{\Delta T}{D} DL}$$

Numero di Biot

JEAN BAPTISTE BIOT

1774-1862

Fisico francese

$$Bi = \frac{hL}{k_{solido}}$$

Rappresenta il rapporto fra il salto termico all’esterno e all’interno di un corpo durante uno scambio di calore

$$h\Delta T_e = k_{solido} \frac{\Delta T_i}{L}$$

Numero di Nusselt

WILHELM NUSSELT

1882-1957

Ingegnere tedesco

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

Rappresenta il rapporto fra il flusso termico che si realizza ad un'interfaccia e il flusso puramente conduttivo (molecolare)

$$Nu = \frac{h\Delta T}{k\dfrac{\Delta T}{L}}$$

Numero di Sherwood

THOMAS KILGORE SHERWOOD

1903-1976

Ingegnere statunitense

$$Sh = \frac{k_c L}{\mathcal{D}}$$

Rappresenta il rapporto fra il flusso di materia che si realizza ad un’interfaccia e il flusso puramente diffusivo (molecolare). È l’analogo per la materia del numero di Nusselt

$$Sh = \frac{k_c \Delta c}{\mathcal{D}\frac{\Delta c}{L}}$$

Fattore d'attrito di Fanning

JOHN THOMAS FANNING
1837-1911

Ingegnere statunitense

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

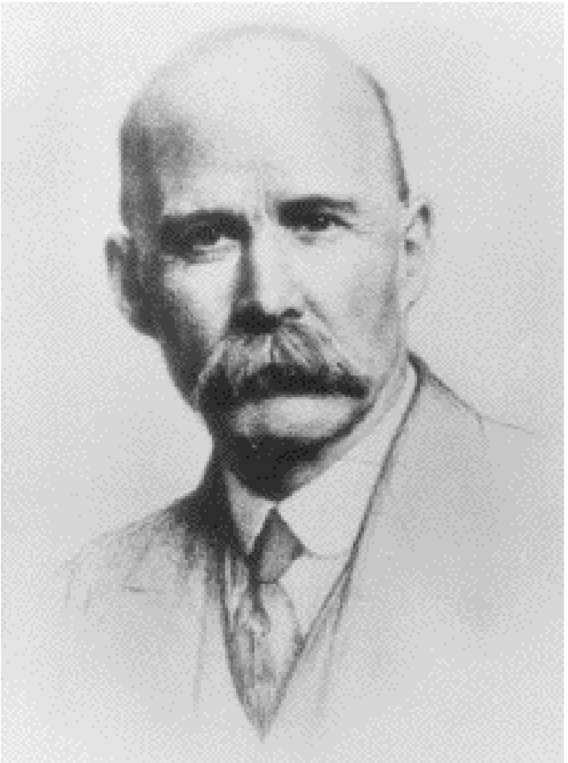
Rappresenta il rapporto fra il flusso di quantità di moto (lo sforzo) che si realizza ad un'interfaccia e il flusso convettivo di quantità di moto (forze inerziali).

$$\frac{f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

Numero di Stanton

SIR THOMAS EDWARD STANTON

1865-1931



Ingegnere britannico

$$St = \frac{Nu}{Re\,Pr} = \frac{h}{\rho C p U}$$

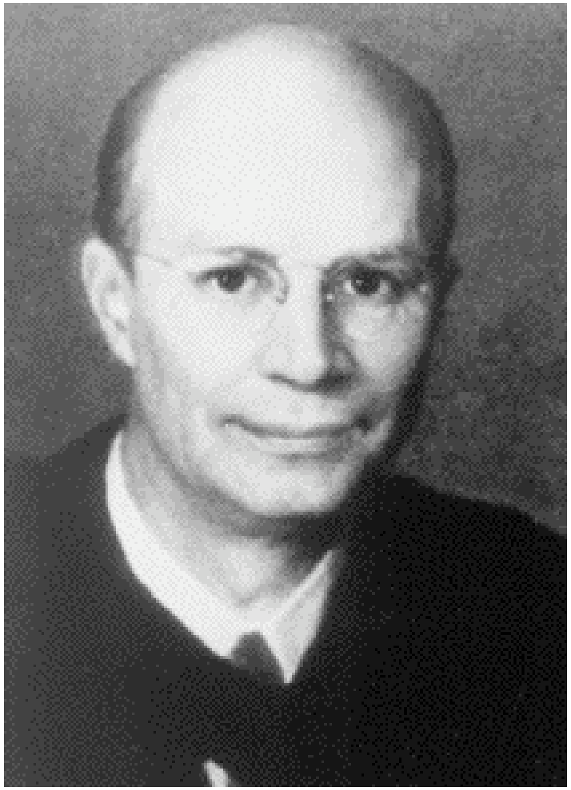
Rappresenta il rapporto fra il flusso termico che si realizza ad un'interfaccia e il flusso convettivo di energia termica. È l'analogo per il calore del fattore di attrito (o meglio di $f/2$)

$$St = \frac{h\Delta T}{\rho C p U \Delta T}$$

Fattore di Colburn

ALLAN PHILIP COLBURN

1904-1955



Ingegnere statunitense

$$j_H = \frac{Nu}{Re\,Pr^{1/3}} \qquad j_D = \frac{Sh}{Re\,Sc^{1/3}}$$

Rappresentano gli analoghi per il calore e la materia di $f/2$. In alcuni casi particolari i valori numerici di $f/2$, j_H e j_D sono uguali (analogia stretta)

Numero di Fourier

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER

1768-1830

$$Fo = \frac{\alpha \; t}{L^2}$$

È il rapporto fra il tempo di osservazione ed il tempo caratteristico di propagazione dell’energia termica all’interno di un corpo.

Matematico e fisico francese